

6. Rovnice vyšších stupňů

- pro rovnice 3. stupně (kubické) a 4. stupně není existují vzorce, ale stojí!
- u vyšších stupňů (vzorce nevě.) se užívá přibližné metody a lib. přesnosti
- ŘEŠENÍ NĚKTERÝCH SPECIÁLNÍCH TYPŮ

1. vhodným postupným rozbíjením upravit na součinový tvar
2. hledat najít nějaký kořen a přejít na řešení rovnice nižšího stupně
3. substituce (přeláči)

VZORCE $a^3+b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$
 $a^3-b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$

Příklady

① Řeš v $\mathbb{R}$ postupným rozbíjením

a) $2x^3 - 3x^2 - 3x + 2 = 0 \quad \mathbb{Q} = \mathbb{R}$

$2(x^3+1) - 3x(x+1) = 0$

$2(x+1)(x^2-x+1) - 3x(x+1) = 0$

$(x+1)[2(x^2-x+1) - 3x] = 0$

$(x+1)(2x^2-2x+2-3x) = 0$

$(x+1)(2x^2-5x+2) = 0$

$x+1=0 \quad 2x^2-5x+2=0$
 $x_1 = -1 \quad (a=2, b=-5, c=2)$

$x_{2,3} = \frac{5 \pm \sqrt{25-4 \cdot 2 \cdot 2}}{2 \cdot 2}$

$x_{2,3} = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{4} = \frac{5 \pm 3}{4}$

$x_{2,3} = \begin{cases} \frac{5+3}{4} = 2 \\ \frac{5-3}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \end{cases}$

$\mathcal{K} = \{-1, 2, \frac{1}{2}\}$

b) $2x^3 - 7x^2 + 7x - 2 = 0$

$2(x^3-1) - 7x(x-1) = 0$

$2(x-1)(x^2+x+1) - 7x(x-1) = 0$

$(x-1)[2(x^2+x+1) - 7x] = 0$

$(x-1)(2x^2+2x+2-7x) = 0$

$(x-1)(2x^2-5x+2) = 0$

$x-1=0 \quad 2x^2-5x+2=0$
 $x_1 = 1 \quad (a=2, b=-5, c=2)$

$x_{2,3} = \frac{5 \pm \sqrt{25-4 \cdot 2 \cdot 2}}{2 \cdot 2} = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{4}$

$x_{2,3} = \frac{5 \pm 3}{4} = \begin{cases} \frac{8}{4} = 2 \\ \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \end{cases}$

$\mathcal{K} = \{1, 2, \frac{1}{2}\}$

c) $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0 \quad \mathbb{Q} = \mathbb{R}$

$x^3(x+2) - 1(x+2) = 0$

$(x+2)(x^3-1) = 0$

$(x+2)(x-1)(x+1) = 0$

$x_1 = -2 \quad x_2 = 1 \quad x_3 = -1$

$\mathcal{K} = \{-2, 1, -1\}$

[kontrola $\sigma = N \Rightarrow$
 $\mathcal{K} = \{-1, 1, 3\}$]

d) $x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 0 \quad \mathbb{Q} = \mathbb{R}$

$x^3+1 + 3x(x+1) = 0$

$(x+1)(x^2-x+1) + 3x(x+1) = 0$

$(x+1)(x^2-x+1+3x) = 0$

$(x+1)(x^2+2x+1) = 0$

$(x+1)(x+1)(x+1) = 0$

$(x+1)^3 = 0$

$x_{1,2,3} = -1$

$\mathcal{K} = \{-1\}$
 trojnásobný

$$c) x^4 + 8x = 0$$

$$x(x^3 + 8) = 0$$

$$x(x+2)(x^2 - 2x + 4) = 0$$

$$x_1 = 0 \quad x_2 = -2$$

$$x^2 - 2x + 4 = 0$$

$$x_{3,4} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 16}}{2}, D < 0$$

není v R řeš.

$$\mathcal{K} = \{0, -2\}$$

$$f) x^4 = 3x^2$$

$$x^4 - 3x^2 = 0$$

$$x^2(x^2 - 3) = 0$$

mno

$$x^2(x^2 - 3) = 0$$

$$x^2(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3}) = 0$$

$$x_1 = 0 \quad x_2 = \sqrt{3} \quad x_3 = -\sqrt{3}$$

$$x_4 = 0$$

$$x^2 - 3 = 0$$

$$x^2 = 3$$

$$|x| = \sqrt{3}$$

$$x_{3,4} = \pm \sqrt{3}$$

$$\mathcal{K} = \{0, \sqrt{3}, -\sqrt{3}\}$$

2) Řeš v R

$$a) x^4 - 4 = 0$$

$$(x^2)^2 - 2^2 = 0$$

$$(x^2 - 2)(x^2 + 2) = 0$$

$$(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})(x^2 + 2) = 0$$

$$x_1 = \sqrt{2}$$

$$x_2 = -\sqrt{2}$$

$$x^2 + 2 = 0$$

$$x^2 = -2$$

$$\mathcal{K} = \{\sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$$

není v R

$$b) x^4 + 2 = 0$$

$$x^4 = -2$$

není v R

$$\mathcal{K} = \emptyset$$

$$c) x^4 - 1 = 0$$

$$(x^2)^2 - 1^2 = 0$$

$$(x^2 - 1)(x^2 + 1) = 0$$

$$(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1) = 0$$

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = -1$$

$$x^2 + 1 = 0$$

$$x^2 = -1$$

$$\mathcal{K} = \{1, -1\}$$

$$d) x^4 + 1 = 0$$

$$x^4 = -1$$

není v R

$$\mathcal{K} = \emptyset$$

$$e) x^6 - 1 = 0$$

$$(x^3)^2 - 1^2 = 0$$

$$(x^3 - 1)(x^3 + 1) = 0$$

$$(x - 1)(x^2 + x + 1)(x + 1)(x^2 - x + 1) = 0$$

$$x - 1 = 0$$

$$x_1 = 1$$

$$x^2 + x + 1 = 0$$

$$x_{2,3} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4}}{2}, D < 0$$

není v R řešení

$$x + 1 = 0$$

$$x_4 = -1$$

$$x^2 - x + 1 = 0$$

$$x_{5,6} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4}}{2}, D < 0$$

není v R řešení

$$\mathcal{K} = \{1, -1\}$$

3) Najdi všechny kořeny rovnice a řeš v R

$$a) x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$$

hledáme kořeny [kořeny mohou být celočíselné dělitele absolutního členu, tj. -6 : 1, -1, 2, -2, 3, -3, 6, -6]
- vyzkoušíme dosazením do rovnice
①: $1^3 - 6 \cdot 1^2 + 11 \cdot 1 - 6 = 1 - 6 + 11 - 6 = 0 \Rightarrow 1$ je kořen

- rozdělíme na součin
 $(x - 1)(x^2 + px + q) = 0$

[problém: najít koef. p, q]

$$ax^2 + bx^2 + cx + d = 0$$

$$\Rightarrow a(x - x_1)(x^2 + px + q) = 0$$

rozdělíme, upravíme
množíme
kv. rov.

- nalezení koef. p, q :

1. zp. DĚLENÍM

$$\begin{array}{r} (x^3 - 6x^2 + 11x - 6) : (x-1) = x^2 - 5x + 6 \\ -(x^3 - x^2) \\ \hline -5x^2 + 11x - 6 \\ -(-5x^2 + 5x) \\ \hline 6x - 6 \\ -(6x - 6) \\ \hline 0 \end{array}$$

POKUD $x_1 = 1$ je kořen $\Rightarrow$ dělení
musí vyjít bez zbytku

2. zp. POROVNÁNÍM KOEFICIENTŮ

$$\begin{aligned} x^3 - 6x^2 + 11x - 6 &= \\ &= (x-1)(x^2 + px + q) = \\ &= x^3 + px^2 + qx - x^2 - px - q \\ &= x^3 + (p-1)x^2 + (q-p)x - q \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p-1 &= -6 & -q &= -6 & \begin{cases} q-p=11 \\ 6-(-5)=11 \end{cases} \\ p &= -5 & q &= 6 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (x-1)(x^2 - 5x + 6) = 0$$

- můžeme takhle tedy psát

$$(x-1)(x^2 - 5x + 6) = 0$$

$$(x-1)(x-3)(x-2) = 0$$

$$\begin{matrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{matrix}$$

$$\mathcal{K} = \{1, 2, 3\}$$

NALEZENÍM KÖŘENŮ LZE RCI UPRAVIT NA
SOUČINOVÝ TVAR - různou lín. a kvadr.
normou

OBEZNĚ

- nalezení kořenů $x_1 \Rightarrow$

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x-x_1)(x^2 + px + q)$$

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = a(x-x_1)(x^3 + px^2 + qx + r)$$

zkusíme opět najít kořen x_2
a kořen x_3

$$a(x-x_1)(x-x_2)(x^2 + px + q) = 0$$

(nebo b)

b) $x^4 - 2x^3 - 3x - 2 = 0$

hl. kořen (ab. člen je -2) $\Rightarrow 1, -1, 2, -2$

$$\textcircled{1} 1^4 - 2 \cdot 1^3 - 3 \cdot 1 - 2 = 1 - 2 - 3 - 2 \neq 0$$

$$\textcircled{-1} (-1)^4 - 2(-1)^3 - 3(-1) - 2 = 1 - 2(-1) + 3 - 2 = 4 - 4 = 0 \text{ je kořen}$$

- rozdělíme na součin

$$(x+1)(x^3 + px^2 + qx + r) = 0$$

hl. p, q, r (1. zp. porovnáním koef.)

$$x^4 - 2x^3 - 3x - 2 = (x+1)(x^3 + px^2 + qx + r) =$$

$$= x^4 + px^3 + qx^2 + rx + x^3 + px^2 + qx + r =$$

$$= x^4 + (p+1)x^3 + (q+p)x^2 + (r+q)x + r$$

$$\begin{cases} p+1=0 & q+p=-2 & r+q=-3 & r=-2 \\ p=-1 & -1+p=-2 & -2+q=-3 & \\ & p=-1 & q=-3+2 & \\ & & q=-1 & \end{cases}$$

- lze tak psát v součinném tvaru

$$(x+1)(x^3 - x^2 - x - 2) = 0$$

zkusíme najít kořen x_2 - ab. člen -2: dělení 1, -1, 2, -2

$$\textcircled{1} 1^3 - 1^2 - 1 - 2 = 1 - 1 - 1 - 2 = -3 \neq 0$$

$$\textcircled{-1} (-1)^3 - (-1)^2 - (-1) - 2 = -1 - 1 + 1 - 2 = -3 \neq 0$$

$$\textcircled{2} 2^3 - 2^2 - 2 - 2 = 8 - 4 - 2 - 2 = 0 \text{ je kořen}$$

$$(x+1)(x-2)(x^2 + px + q) = 0$$

zkusíme opět na součin, budeme
opět hledat koeficienty p, q rozdělením

2. zp. dělením

$$\begin{aligned} (x^4 - 2x^3 - 3x - 2) : (x+1) &= \\ -(x^4 + x^3) &= x^3 - x^2 - x - 2 \\ \hline -x^3 - 2x^2 - 3x - 2 \\ -(-x^3 - x^2) &= \\ \hline -x^2 - 3x - 2 \\ -(-x^2 - x) &= \\ \hline -2x - 2 \\ -(-2x - 2) &= \\ \hline 0 \end{aligned}$$

$$(x+1)(x^3 - x^2 - x - 2) = 0$$

$$\text{neú } (x+1)(x-2)(x^2 + px + q) = 0$$

$$\text{hl. koef. } p, q \quad \text{2. úp. DELENÍM}$$

$$(x^3 - x^2 - x - 2) : (x-2) = x^2 + x + 1$$

$$\begin{array}{r} -(x^3 - 2x^2) \\ \hline x^2 - x - 2 \\ -(x^2 - 2x) \\ \hline x - 2 \\ -(x - 2) \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\text{tedy neú } (x+1)(x-2)(x^2 + px + 1) = 0$$

$$x_1 = -1 \quad x_2 = 2$$

$$x^2 + px + 1 = 0$$

$$(a=1, b=p, c=1)$$

$$x_{1/2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2}, D < 0$$

$$\text{mimo } \mathbb{R} \text{ kú.}$$

$$\mathcal{K} = \{-1, 2\}$$

c) $x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 4x - 4 = 0$

20 [hl. koef. ① $1 - 4 + 3 + 4 - 4 = 0$]

$$(x-1)(x^3 + px^2 + qx + r) = 0$$

$$\text{hl. } p, q, r:$$

$$(x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 4x - 4) : (x-1) = x^3 - 3x^2 + 4$$

$$\begin{array}{r} -(x^4 - x^3) \\ \hline -3x^3 + 3x^2 + 4x - 4 \\ -(-3x^3 + 3x^2) \\ \hline 4x - 4 \\ -(4x - 4) \\ \hline 0 \end{array}$$

$$(x-1)(x^3 - 3x^2 + 4) = 0$$

$$\text{hl. koef. ① } 1 - 3 + 4 \neq 0$$

$$\text{② } -1 - 3 + 4 = 0$$

$$(x-1)(x+1)(x^2 + px + q) = 0$$

$$(x^3 - 3x^2 + 4) : (x+1) = x^2 - 4x + 4$$

$$\begin{array}{r} -(x^3 + x^2) \\ \hline -4x^2 + 4 \\ -(-4x^2 + 4x) \\ \hline 4x + 4 \\ -(4x + 4) \\ \hline 0 \end{array}$$

$$(x-1)(x+1)(x^2 - 4x + 4) = 0$$

$$(x-1)(x+1)(x-2)(x-2) = 0$$

$$(x-1)(x+1)(x-2)^2 = 0$$

$$x_1 = 1 \quad x_2 = -1 \quad x_{3/4} = 2 \text{ (dvojnásobek)}$$

$$\mathcal{K} = \{1, -1, 2\}$$

2. úp. POROVNÁNÍM

$$x^2(x^2 - 2) =$$

$$= (x-2)(x^2 + px + q) =$$

$$= x^3 + px^2 + qx - 2x^2 - 2px - 2q$$

$$= x^3 + (p-2)x^2 + (q-2p)x - 2q$$

$$p-2 = -1 \quad \begin{bmatrix} -1 = q-2p \\ -1 = 1-2 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} -2 = -2q \\ q = 1 \end{matrix}$$

$$p = 1$$

$$x^3 - x^2 - x - 2 = (x-2)(x^2 + x + 1)$$

$$\text{a rovn. lze psát}$$

$$(x-1)(x-2)(x^2 + x + 1) = 0$$

2. úp. RYCHLEJŠÍ - maloumnu 2. koef. 1

$$x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 4x - 4 = 0$$

$$\text{hl. koef. ① } 1 - 4 + 3 + 4 - 4 = 0$$

$$\text{② } 1 + 4 + 3 - 4 - 4 = 0$$

$$x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 4x - 4 = 0$$

$$(x-1)(x+1)(x^2 + px + q) = 0$$

$$(x-1)(x^2 + px + q) = 0$$

$$\text{hl. } p, q:$$

$$(x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 4x - 4) : (x-1) = x^3 - 4x^2 + 4x + 4$$

$$\begin{array}{r} -(x^4 - x^3) \\ \hline -4x^3 + 3x^2 + 4x - 4 \\ -(-4x^3 + 4x^2) \\ \hline -4x^2 + 4x - 4 \\ -(-4x^2 + 4x) \\ \hline -4x^2 - 4 \\ -(-4x^2 - 4) \\ \hline 0 \end{array}$$

- neú

$$(x-1)(x+1)(x^2 - 4x + 4) = 0$$

$$(x-1)(x+1)(x-2)^2 = 0$$

$$x_1 = 1 \quad x_2 = -1 \quad x_{3/4} = 2$$

d) $x^3 - 2x^2 - 31x - 28 = 0$

20 [$\mathcal{K} = \{1, -4, -7\}$]